竞赛常用知识手册

数论部分

1　整除

1. 定义

对于整数 a、$b(b\neq 0)$，存在整数 q，满足 $a=bq$ 就叫做 a 能被 b 整除，记作 $b|a$. 其中 a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数(因数).

若 $b\neq\pm 1$，则 b 叫做 a 的真约数.

若 a 不能被 b 整除，则记作 $b\nmid a$.

如果 $a^t|b$，$a^{t+1}\nmid b$，$t\in\mathbf{N}$，记作 $a^t\parallel b$.

2. 关于整除的一些简单性质

(1) $b|0$，$\pm 1|a$，$a|a\ (a\neq 0)$.

(2) 若 $b|a$，$a\neq 0$，则 $1\leqslant |b|\leqslant |a|$.

(3) 若 $c|b$，$b|a$，则 $c|a$.

(4) 若 $b|a$，$c\neq 0$，则 $bc|ac$.

(5) 若 $c|a$，$c|b$，则

$c|(ma+nb)\ (m$、$n\in\mathbf{Z})$.

(6) 若 $\sum_{i=1}^{k}a_i=0$，b 能整除 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中的 $k-1$ 个，则 b 能整除另一个.

2　同余

1. 定义

设 m 为正整数，若整数 a 和 b 被 m 除的余数相同，则称 a 和 b 对模 m 同余，记作

$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$.

2. 基本性质

(1) $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow m|(b-a)$.

(2) $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$

$\Leftrightarrow b=km+a\ (k\in\mathbf{Z})$.

(3) $a\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)$.

(4) 若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$，则 $b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)$.

(5) 若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$，$b\equiv c\ (\mathrm{mod}\ m)$，则

$a\equiv c\ (\mathrm{mod}\ m)$.

(6) 若 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$，$c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ m)$，则

$a\pm c\equiv b\pm d\ (\mathrm{mod}\ m)$，

$ac\equiv bd\ (\mathrm{mod}\ m)$，$a^n\equiv b^n\ (\mathrm{mod}\ m)$.

(7) 若 $ac\equiv bc\ (\mathrm{mod}\ m)$，$(c, m)=d$，则

$a\equiv b\left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d}\right)$.

其中符号 (c, m) 表示 c 与 m 的最大公约数.

特别地，当 $(c, m)=1$ 时，若 $ac\equiv bc\ (\mathrm{mod}\ m)$，则 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$.

3. 同余类

由关于模 m 同余的整数组成的集合，每一个集合叫做关于模 m 的同余类(或叫做关于模 m 的剩余类).

由于任何整数被 m 除的余数只能是 $0, 1, \cdots, m-1$ 这 m 种情形，所以，整数集可以按对模 m 同余的关系分成 m 个子集：

$A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$.

其中 $A_i=\{qm+i \mid m$ 为模，$q\in\mathbf{Z}\}$，$i=0, 1, \cdots, m-1$.

所有的 $A_i\ (i=0, 1, \cdots, m-1)$ 满足

$\bigcup_{i=0}^{m-1}A_i=\mathbf{Z}$，$\bigcap_{i=0}^{m-1}A_i=\varnothing$.

4. 完全剩余系

从模 m 的 m 个同余类 $A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$ 中，每一类 A_i 取一数 a_i，则 $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}$ 叫做模 m 的一个完全剩余系(简称 m 的完系).

最简单的模 m 的完全剩余系是

$0, 1, \cdots, m-1$，

也叫做模 m 的最小非负完系.

显然 m 个相继整数构成模 m 的一个完系.

3　质数与合数

1. 一个大于 1 的整数,如果只有 1 和它本身作为它的约数,这样的正整数叫做质数(也叫素数);如果除了 1 和它本身之外还有其他的正约数,这样的正整数叫做合数.

1 既不是质数也不是合数. 因此,正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 满足

$$\mathbf{Z}_+ = \{1\} \cup \{质数\} \cup \{合数\}.$$

2. 大于 1 的整数的所有真约数中,最小的正约数一定是质数.

3. 合数 a 的最小质约数不大于 $\sqrt{a}$.

4. 质数有无穷多个.

5. 不存在这样的整系数多项式

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i,$$

使得对任意的自然数 n, $f(n)$ 都是质数.

6. 威尔逊(Wilson)定理

p 为质数的充分必要条件是

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

4　质因数分解

1. 质因数分解定理(整数的唯一分解定理)

每一个大于 1 的整数都能分解成质因数连乘积的形式,且如果把这些质因数按照由小到大的顺序排列(相同因数的乘积写成幂的形式),这种分解方法是唯一的.

2. 整数 $n(n>1)$ 的标准分解式为

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}. \quad ①$$

其中 p_i 为质数, α_i 为正整数, $i = 1, 2, \cdots, m$.

3. 约数个数定理

设 $d(n) = \sum_{d|n} 1$ 表示大于 1 的整数 n 的所有正约数的个数, n 的标准分解式为式①,则

$$d(n) = \prod_{i=1}^{m} (1+\alpha_i).$$

4. 约数和定理

设 $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ 表示大于 1 的整数 n 的所有正约数的和, n 的标准分解式为式①,则

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

5. 在 $n!$ 的标准分解式中,质因数 p 的方幂为 $\sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^r}\right]$. 其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(本刊资料室)

5　公约数和公倍数

1. 公约数和最大公约数

(1) 若 $c \mid a_1, c \mid a_2, \cdots, c \mid a_n$,则 c 称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公约数.

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的所有公约数中最大的一个称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数. 记作 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(2) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的标准分解式为

$$a_1 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}, a_2 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}, \cdots, a_n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\delta_i},$$

其中 p_i 为质数, $\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i$ 为非负整数, $i = 1, 2, \cdots, m$,则

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{t_i},$$

其中, $t_i = \min\{\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i\}$.

(3) 如果 a 是 b 的倍数,那么, a 和 b 的公约数的集合与 b 的约数集合相等.

(4) 如果 a 是 b 的倍数,则 $(a, b) = b$, g、$r \in \mathbf{Z}$.

(5) 设 a 和 b 是不同时等于 1 的正整数,且 $d = ax_0 + by_0$ 是形如 $ax + by$ (x、y 是整数) 的整数中的最小正整数,则 $d = (a, b)$.

(6) 正整数 a 和 b 的公约数集合与它们的最大公约数的约数集合相等.

(7) 设 m 是任意正整数,则

$(am, bm) = (a, b) m$.

(8) 设 n 是 a 和 b 的一个公约数,则

$$\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = \frac{(a, b)}{n}.$$

(9) 设正整数 a 和 b ($a > b$) 满足等式

$a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$, q、$r \in \mathbf{Z}$.

则 $(a, b) = (b, r)$.

由此可得到求 a、b 最大公约数的辗转相除法.

设 $a = bq_1 + r_1, 0 \leqslant r_1 < b$.

若 $r_1 = 0$,则 $(a, b) = b$.

若 $r_1 \neq 0$,则又可用 r_1 去除 b 得

$b = r_1 q_2 + r_2, 0 \leqslant r_2 < r_1$.

若 $r_2 = 0$,则 $(a, b) = (b, r_1) = r_1$.

若 $r_2 \neq 0$,再用 r_2 去除 r_1 得

$r_1 = r_2 q_3 + r_3, 0 \leqslant r_3 < r_2$.

如此继续下去,由于 $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$

以及 r_i ($i = 1, 2, \cdots$) 是非负整数,则一定在进行到某一次时,例如第 $n + 1$ 次得到 $r_{n+1} = 0$. 但由于 $r_n \neq 0$,则有

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots$$
$$= (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

用此法还可以求 (5) 中形如 $ax + by$ 的最小正整数 $d = ax_0 + by_0$.

2. 公倍数和最小公倍数

(1) 若 $a_1 \mid b, a_2 \mid b, \cdots, a_n \mid b$,则 b 称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公倍数. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的所有公倍数中最小的一个称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数. 记作 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

(2) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的标准分解式为

$$a_1 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}, a_2 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}, \cdots, a_n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\delta_i},$$

其中 p_i 为质数, $\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i$ 为非负整数, $i = 1, 2, \cdots, m$,则

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i},$$

其中, $r_i = \max\{\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i\}$.

(3) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数是它们的任一公倍数的约数.

(4) $[a, b] = \dfrac{ab}{(a, b)}$.

(本刊资料室)

6　互质数、费马小定理和孙子定理

1. 互质数

(1) 若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$,就叫做 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互质(也叫做互素). 这 n 个数叫互质数(互素数).

特别地,1 和任何整数互质;相邻两个整数互质;相邻两个奇数互质;对质数 p,若 p 不能整除 a,则 p 与 a 互质.

(2) 若 $(a, b) = 1$,则

$(a \pm b, a) = 1$, $(a \pm b, ab) = 1$.

(3) 若 $(a, b) = 1$, $a | bc$,则 $a | c$.

(4) 若 $a | c$, $b | c$, $(a, b) = 1$,则 $ab | c$.

(5) 若 $(a, b) = 1$,则 $(b, ac) = (b, c)$.

(6) 若 $(a, b) = 1$, $c | a$,则 $(c, b) = 1$.

(7) 若 $(a, b) = 1$,则 $(a, b^k) = 1$.

(8) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中的每一个与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中的每一个互质,则

$(a_1 a_2 \cdots a_m, b_1 b_2 \cdots b_n) = 1$.

2. 欧拉函数

定义:小于 m 且与 m 互质的正整数的个数叫做欧拉(Euler)函数,记作 $\phi(m)$.

若 $m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$,则

$$\phi(m) = m \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

其中 p_i 是质数,α_i 是正整数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

当 m 为质数时,$\phi(m) = m - 1$.

性质:

(1) $\phi(m)$ 是积性函数,即 $(a, b) = 1$,则

$\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$.

(2) 若 p 是质数,则

$\phi(p) = p - 1$, $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

(3) 设 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,则

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(4) 设 $d_1, d_2, \cdots, d_{T(m)}$ 是 m 的所有正约数,则

$$\sum_{i=1}^{T(m)} \phi(d_i) = m.$$

3. 欧拉定理和费马小定理

(1) 欧拉定理

设 $m \geqslant 2$,且 $(a, m) = 1$, $\phi(m)$ 为欧拉函数,则

$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

(2) 费马(Fermat)小定理

设 p 是质数,且 $(a, p) = 1$,则

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

注:费马小定理是欧拉定理当 m 为质数时的特例.

4. 孙子定理

设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 k 个两两互质的正整数. 则同余式组

$x \equiv b_1 \pmod{m_1}$,

$x \equiv b_2 \pmod{m_2}$,

……

$x \equiv b_k \pmod{m_k}$

有唯一解

$x \equiv M_1' M_1 b_1 + M_2' M_2 b_2 + \cdots + M_k' M_k b_k \pmod{M}$.

其中,$M = m_1 m_2 \cdots m_k$,

$M_i = \frac{M}{m_i}$, $i = 1, 2, \cdots, k$,

$M_i' M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

注:孙子定理又叫中国剩余定理.

(本刊资料室)

7 奇数和偶数

1. 若一个整数能被 2 整除,则这个整数叫偶数;若一个整数被 2 除余 1,则这个整数叫奇数.

奇数集合和偶数集合都是以 2 为模的同余类

2. 奇数个奇数的和(或差)是奇数,偶数个奇数的和(或差)是偶数.

任意多个偶数的和(或差)为偶数.

一个奇数与一个偶数的和(或差)是奇数.

两个整数的和与差有相同的奇偶性.

3. 任意多个奇数的积是奇数.

若任意多个整数中至少有一个偶数,则它们的积是偶数.

8 完全平方数

1. 若 a 是整数,则 a^2 叫做 a 的完全平方数.

2. 完全平方数的个位数只能是 0,1,4,5,6,9.

3. 奇数的平方的十位数是偶数.

4. 个位数是 5 的平方数,其十位数是 2,百位数是偶数.

5. 如果一个完全平方数的个位数是 6,那么,它的十位数是奇数.

6. 偶数的平方能被 4 整除;奇数的平方被 4 除余 1.

7. 偶数的平方被 8 除余 0 或 4;奇数的平方被 8 除余 1.

8. 若一个整数能被 3 整除,则这个数的平方能被 3 整除;若一个整数不能被 3 整除,则这个数的平方被 3 除余 1.

9. 若一个整数能被 5 整除,则这个数的平方能被 5 整除;若一个整数不能被 5 整除,则这个数的平方被 5 除余 +1 或 - 1.

10. 把完全平方数的各位数码相加,如果所得到的和不是一位数,再把这个和的各位数码相加,直到和是一位数为止,这个一位数只能是 0,1,4,7,9.

11. 两个相邻完全平方数之间不可能有完全平方数.

12. 完全平方数的所有正约数个数为奇数,并且反过来也成立.

13. 如果质数 p 是一个完全平方数的约数,那么,p^2 也是这个完全平方数的约数.

(本刊资料室)

9 整数的可除性特征

1. 一个整数能被 2 整除的充分必要条件是这个数的个位数是偶数.

2. 一个整数能被 4 整除的充分必要条件是这个数的末两位数能被 4 整除.

3. 一个整数能被 5 整除的充分必要条件是这个数的个位数是 0 或 5.

4. 一个整数能被 3 整除的充分必要条件是这个数的各位数字之和能被 3 整除.

5. 一个整数能被 9 整除的充分必要条件是这个数的各位数字之和能被 9 整除.

6. 一个整数能被 11 整除的充分必要条件是这个数的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被 11 整除.

7. 一个整数能被 $10n - 1$ (n 为正整数)整除的充分必要条件是把这个数的个位数截去之后,再加上这个个位数的 n 倍,它的和能被 $10n - 1$ 整除,即把 A 写成 $A = 10x + y$, $y \in \{0,1,\cdots,9\}$,则

$$(10n - 1) \mid A \Leftrightarrow (10n - 1) \mid (x + ny).$$

由此可判断整数 A 能否被 9,19,29,39,…整除.

8. 一个整数能被 $10n + 1$ (n 为正整数)整除的充分必要条件是把这个数的个位数截去之后,再减去这个个位数的 n 倍,它的差能被 $10n + 1$ 整除,即把 A 写成 $A = 10x + y$, $y \in \{0,1,\cdots,9\}$,则

$$(10n + 1) \mid A \Leftrightarrow (10n + 1) \mid (x - ny).$$

由此可判断整数 A 能否被 11,21,31,41,…整除.

10 十进制记数法

1. 数 A 的十进制表示为

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i,$$

其中 $a_i \in \{0,1,\cdots,9\}$, $i = 0,1,\cdots,n-1$, $a_n \in \{1,2,\cdots,9\}$.

2. A 的 n 次幂的个位数等于 A 的个位数的 n 次幂的个位数,即

$$A^n \equiv a_0^n \pmod{10}.$$

3. A^n 的个位数以 4 为周期循环出现.

4. A 与它的各位数字之和 $S(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i$ 关于模 9 同余,即

$$A \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \pmod{9}.$$

5. A 的各位数字之和 $S(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i$ 满足

$$S(A + B) \leqslant S(A) + S(B),$$
$$S(AB) \leqslant S(A)S(B).$$

6. 若 a 和 b 为任意非负整数,则 $\frac{1}{2^a \times 5^b}$ 的小数展开式是有限的.

7. 若 $\frac{1}{n}$ 具有有限小数展开式,则 $n = 2^a \times 5^b$,其中 a、b 为非负整数.

8. 在 $\frac{1}{n}$ 的十进制小数展开式中,循环节长不大于 $n - 1$.

9. 若 $(n,10) = 1$,则 $\frac{1}{n}$ 的循环节长为 r, r 是满足

$$10^r \equiv 1 \pmod{n}$$

的最小正整数.

(本刊资料室)

11　k 进制记数法

1. 设 $k \geqslant 2$ 为任一整数(称为基)，则任一十进制整数 A 可唯一地用基 k 表示，即可写成如下的形式：

$$A = d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + \cdots + d_n k^n = \sum_{i=0}^{n} d_i k^i .$$

其中 $d_i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$，$i = 0, 1, \cdots, n-1$，$d_n \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$.

2. A 的 k 进制表示可记为

$$A = (d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_k .$$

3. 设 B 为正的纯小数，则 B 可以唯一地用基 k 表示，即可写成如下的形式：

$$B = d_{-1} k^{-1} + d_{-2} k^{-2} + \cdots + d_{-n} k^{-n} + \cdots$$

其中 $d_{-i} \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$，$i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$

注：若 B 为有限小数，则上式为有限项；若 B 为无限小数，则上式为无限项.

12　不定方程

1. 二元一次不定方程 $ax + by = c$

(1) 不定方程 $ax + by = c$（a、b、c 为整数）有整数解的充分必要条件是 $(a, b) \mid c$.

(2) 若 $(a, b) = 1$，且 (x_0, y_0) 是不定方程 $ax + by = c$ 的一组整数解，则

$$x = x_0 + bt, y = y_0 - at\ (t \text{ 是整数})$$

是方程的全部整数解.

2. 不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解

(1) 若 $x = a, y = b, z = c$（a、b、c 为正整数）是方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解，且 $(a, b) = 1$，就称这组解为方程的一组基本解.

(2) 若 $x = a, y = b, z = c$ 为方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组基本解，则 a 和 b 中恰有一个为偶数，c 为奇数.

(3) 设 $x = a, y = b, z = c$ 为方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组基本解，且假定 a 是偶数，则存在正整数 m 和 n，$m > n$，$(m, n) = 1$，且 $m \not\equiv n \pmod 2$，使得

$$a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2 .$$

(4) 若 $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$，则 a、b、c 是 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解；如果还有 $m > n > 0$，$(m, n) = 1$ 和 $m \not\equiv n \pmod 2$，则 a、b、c 就是方程的一组基本解.

3. 佩尔(Pell)方程

(1) 方程 $x^2 - dy^2 = 1$（d 为给定的正整数），叫做佩尔方程.

(2) 无论 d 取什么值，$x = \pm 1, y = 0$ 是佩尔方程的解，这组解称为佩尔方程的平凡解.

(3) 设 $d > 0$ 是一个非平方数，则佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 有无穷多个不同的整数解.

(4) 设 $n > 0$，(x_1, y_1) 是佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的一个解，又设 x_n 与 y_n 由下式定义

$$(x_1 - \sqrt{d}\, y_1)^n = x_n + \sqrt{d}\, y_n ,$$

则 (x_n, y_n) 是佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的一个解.

（本刊编辑部）

13 整点

在平面直角坐标系中,横、纵坐标均为整数的点叫做整点,整点也叫格点. 类似地,可定义空间直角坐标系中的整点.

1. 整点多边形的面积公式

顶点都在整点上的简单多边形(即不自交的多边形),其面积为 S,多边形内的整点数为 N,多边形边上的整点数为 L,则

$$S = N + \frac{L}{2} - 1.$$

2. 正方形内的整点

(1) 各边均平行于坐标轴的正方形,如果内部不含整点,它的面积最大是 1.

(2) 内部不含整点的正方形面积,最大是 2.

(3) 内部只含一个整点的最大正方形面积是 4.

3. 圆内整点问题

设 $A(r)$ 表示区域 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ 上的整点数,r 是正实数,则

$$A(r) = 1 + 4[r] + 4\sum_{1 \leqslant s \leqslant r}[\sqrt{r^2 - s^2}]$$

或 $$A(r) = 1 + 4[r] + 8\sum_{1 \leqslant s \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}}}[\sqrt{r^2 - s^2}] - 4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

此外,当 r 充分大时,区域 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ 上的格点数 $A(r)$ 接近于 πr.

4. 不存在整点正三角形.

5. 当 $n \geqslant 5$ 时,不存在整点正 n 边形.

14 函数$[x]$

1. 定义

设 $x \in \mathbf{R}$,则$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

2. 函数$[x]$的性质

(1) $y = [x]$的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,值域为整数集 $\mathbf{Z}$.

(2) $x = [x] + r, 0 \leqslant r < 1$.

(3) $x - 1 < [x] \leqslant x < [x] + 1$.

(4) $y = [x]$是广义增函数,即当 $x_1 \leqslant x_2$ 时,$[x_1] \leqslant [x_2]$成立.

(5) 设 $n \in \mathbf{Z}$,则$[n + x] = n + [x]$.

(6) $[\sum_{i=1}^{n} x_i] \geqslant \sum_{i=1}^{n}[x_i]$.

(7) 对正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$[\prod_{i=1}^{n} x_i] \geqslant \prod_{i=1}^{n}[x_i].$$

特别地,对正数 x 及正整数 n 有

$$[x^n] \geqslant [x]^n, [x] \geqslant [\sqrt[n]{x}]^n.$$

(8) 对正实数 x、y 有

$$\left[\frac{y}{x}\right] \leqslant \frac{[y]}{[x]}.$$

(9) 设 n 为正整数,则

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right].$$

(10) 对整数 x,有$[-x]=-[x]$;

对非整数 x,有$[-x]=-[x]-1$.

(11) 对正整数 m 和 n,不大于 m 的 n 的倍数共有$\left[\frac{m}{n}\right]$个.

(12) 函数$\{x\}$定义为实数 x 的正的纯小数部分,即$\{x\}=x-[x]$.

$y=\{x\}$还有如下一些性质:

(i) $\{x\} \in [0,1)$.

(ii) $\{x\}$是以 1 为最小正周期的周期函数.

(iii) $\{n+x\}=\{x\}$ (n 为整数).

(13) 设 $p \in \mathbf{N}$,满足 $2^{\lambda} \mid (2^{p})!$ 的 λ 的最大值为 $M=2^{p}-1$.

由(11)知

$$M=\left[\frac{2^{p}}{2}\right]+\left[\frac{2^{p}}{2^{2}}\right]+\left[\frac{2^{p}}{2^{3}}\right]+\cdots$$

$$=2^{p-1}+2^{p-2}+\cdots+2+1$$

$$=2^{p}-1.$$

15 阶数与原根

1. 阶数定义

当$(a,m)=1$,有最小正整数 λ,使

$$a^{\lambda} \equiv 1 \pmod{m},$$

且 $a^{k} \not\equiv 1 \pmod{m}$, $0<k<m$,

则 λ 叫做 a 关于 m 的阶数.

由欧拉定理得 $\lambda \leqslant \phi(m)$, $\lambda \mid \phi(m)$.

2. 原根定义

如果 $\lambda=\phi(m)$,叫做 a 关于模 m 的阶数是 $\phi(m)$,此时,a 叫做 m 的原根.

3. 阶数 λ 的性质

(1) 如果 a 关于 m 的阶数是 λ,那么,a^{0}, a^{1}, $\cdots$, $a^{\lambda-1}$中,任两数关于模 m 不同余.

(2) 若 λ 是关于 m 的阶数,则满足

$$a^{t} \equiv 1 \pmod{m}$$

的 t,都有 $\lambda \mid t$.

(本刊资料室)

几 何 部 分

1 平面几何

1.1 三角形的性质

设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c,三个内角分别为 A、B、C,内切圆、外接圆和三个旁切圆的半径分别为 r、R、r_1、r_2、r_3,半周长为 p,三条高线长分别为 h_a、h_b、h_c,三条中线长分别为 m_a、m_b、m_c,三条角平分线长分别为 t_a、t_b、t_c,$\angle A$ 的外角平分线长为 t_a',边 BC 上的斜高为 h,斜高与 BC 的夹角为 α,面积为 S. 内心、外心、重心、垂心分别为 I、O、G、H,三个旁心分别为 I_1、I_2、I_3.

1.1.1 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

1.1.2 余弦定理

$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cos A,$$

$$b^{2}=c^{2}+a^{2}-2ca\cos B,$$

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos C.$$

1.1.3 三角形的面积公式

(1) $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$;

(2) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ah\sin\alpha$;

(3) $S=\frac{abc}{4R}=2R^{2}\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

$=\frac{R^{2}}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$;

(4) $S=\frac{a^{2}\sin B\cdot\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^{2}\sin C\cdot\sin A}{2\sin(C+A)}$

$=\frac{c^2\sin A\cdot\sin B}{2\sin(A+B)}$;

(5) 海伦(Heron)公式

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

(6) $S=r^2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$;

(7) $S=pr=(p-a)r_1$

$=(p-b)r_2=(p-c)r_3$.

1.1.4 若两个三角形相似,则面积比等于相似比的平方;若两个三角形有一条边相等,则面积比等于对应边上高的比或斜高的比;若两个三角形有一条高相等,则面积比等于高对应的边的比.

1.1.5 $r=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$;

$r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

$r_2=4R\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

$r_3=4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$;

$r_1+r_2+r_3=r+4R$.

1.1.6 $\angle BIC=90°+\frac{\angle A}{2}$, $\angle CIA=90°+\frac{\angle B}{2}$,

$\angle AIB=90°+\frac{\angle C}{2}$, $\angle BI_1C=90°-\frac{\angle A}{2}$,

$\angle CI_2A=90°-\frac{\angle B}{2}$, $\angle AI_3B=90°-\frac{\angle C}{2}$.

1.1.7 由顶点 A、B、C 引出的内切圆的切线长分别为 $p-a$、$p-b$、$p-c$;所对角内的旁切圆的切线长为 p;点 B、C 到 $\angle A$ 内的旁切圆的切线长分别为 $p-c$、$p-b$;点 C、A 到 $\angle B$ 内的旁切圆的切线长分别为 $p-a$、$p-c$;点 A、B 到 $\angle C$ 内的旁切圆的切线长分别为 $p-b$、$p-a$.

1.1.8 若 AI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D,则 $DI=DB=DC=DI_1$,即 I、B、C、I_1 四点共圆,圆心为 D;若在线段 AD 及其延长线上存在点 I'、I_1',满足 $DI'=DB=DC=DI_1'$,则 I'、I_1' 分别为 $\triangle ABC$ 的内心和 $\angle A$ 内的旁心.

1.1.9 $\angle BOC=2\angle A$, $\angle COA=2\angle B$,

$\angle AOB=2\angle C$.

1.1.10 阿基米德(Archimedes)定理

三角形三条中线交于一点 G(重心),且 G 到顶点的距离等于这个顶点向对边所作中线长的 $\frac{2}{3}$.

1.1.11 帕普斯(Pappus)定理(中线公式)

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$,

$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$,

$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

1.1.12 $t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$,

$t_b=\frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$,

$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$.

1.1.13 $t_a'=\frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$.

1.1.14 $\angle BHC=180°-\angle A$,

$\angle CHA=180°-\angle B$, $\angle AHB=180°-\angle C$.

1.1.15 锐角三角形的垂心是其垂足三角形的内心,钝角三角形的垂心是其垂足三角形的旁心;锐角三角形的三个顶点是其垂足三角形的旁心.

1.1.16 $\triangle BHC$、$\triangle CHA$、$\triangle AHB$ 的外接圆半径都等于 R.

1.1.17 卡诺(Carnot)定理

$\triangle BHC$、$\triangle CHA$、$\triangle AHB$ 的垂心分别为 A、B、C.

1.1.18 设 AH 交 BC 于点 D,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 K,则 $HD=DK$.

1.1.19 设 AH、BH、CH 分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F,则

$AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$.

1.1.20 设边 BC 的中点为 L,则 $AH\parallel OL$,且 $AH=2OL=2R\cos A$.

(本刊资料室)

1.2 多边形的性质

1.2.1 n 边形内角和等于 $(n-2)\pi$.

1.2.2 四边形面积公式

(1) 矩形

$S=ab$（a、b 分别为矩形的邻边的长）;

(2) 平行四边形

$S=ah=ab\sin\theta$（a、b 分别为平行四边形的邻边的长，θ 是这两条边的夹角，h 为底边 a 上的高）;

(3) 梯形

$S=\frac{1}{2}(a+b)h$（a、b 分别为上、下底的长，h 为高）;

(4) 任意四边形

$S=\frac{1}{2}mn\sin\phi$（m、n 分别为两条对角线的长，ϕ 为对角线的夹角）;

(5) 贝利契纳德 (Bretschneider) 面积公式

$S=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$

（m、n 分别为两条对角线的长，a、b、c、d 为四条边的长）;

(6) 圆内接四边形

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

（p 为半周长，a、b、c、d 为四条边的长）;

(7) 圆外切四边形

$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{A+C}{2}$（$a$、$b$、$c$、$d$ 为四条边的长）;

(8) 双心四边形（既有内切圆又有外接圆的四边形）

$S=\sqrt{abcd}$（a、b、c、d 为四条边的长）.

1.2.3 贝利契纳德关于四边形的余弦定理

设 a、b、c、d 为四条边的长，m、n 分别为两条对角线的长，则有

$$m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C).$$

1.2.4 在周长一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的面积最大.

1.2.5 在周长一定的简单闭曲线的集合中，圆的面积最大.

1.2.6 在面积一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的周长最小.

1.2.7 在面积一定的简单闭曲线的集合中，圆的周长最小.

1.3 重要定理和极值

(1) 梅涅劳斯 (Menelaus) 定理

一直线与 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或延长线分别交于点 X、Y、Z. 则

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

(2) 梅涅劳斯定理的逆定理

设 X、Y、Z 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或延长线上的点. 若 $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$，则 X、Y、Z 三点共线（梅涅劳斯线）.

(3) 塞瓦 (Ceva) 定理

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，直线 AP、BP、CP 分别与边 BC、CA、AB 交于点 D、E、F. 则

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

(4) 塞瓦定理的逆定理

设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点. 若 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则 AD、BE、CF 三线交于一点（塞瓦点）.

(5) 托勒密 (Ptolemy) 定理

若四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，则有

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD.$$

(6) 托勒密定理的逆定理

若四边形 $ABCD$ 满足

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD,$$

则四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

(7) 广义托勒密定理

在四边形 $ABCD$ 中,有

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD,$$

等号成立的条件当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

(8) 西姆松(Simson)定理

设 $\triangle ABC$ 外接圆上任意一点 P 在三边 BC、CA、AB 上的投影为 D、E、F. 则 D、E、F 在一条直线(西姆松线)上.

(9) 西姆松定理的逆定理

设 $\triangle ABC$ 所在平面上一点 P 在三边 BC、CA、AB 上的投影为 D、E、F. 若 D、E、F 三点共线,则 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

(10) 费马(Fermat)问题

到 $\triangle ABC$ 三顶点距离之和最小的点——费马点 F. 当 $\triangle ABC$ 的最大角小于 $120°$ 时,点 F 关于三边 BC、CA、AB 的张角均为 $120°$;当 $\triangle ABC$ 的最大角大于 $120°$ 时,点 F 即为最大角的顶点.

(11) 到 $\triangle ABC$ 三顶点距离的平方和最小的点——重心 G.

卡诺(Carnot)定理 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点,则

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$
$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$$
$$\geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2;$$

莱布尼兹(Leibnitz)公式 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点,则

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$
$$= 3PG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

其中 a、b、c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边边长.

(12) $\triangle ABC$ 内到三边距离之积最大的点——重心 G.

(本刊资料室)